18. If $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ in 'F' are distinct characteristic roots of $T \in A(V)$ and if $v_1, v_2, \ldots, v_k$ are characteristic vectors of T belonging to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ respectively then $v_1, v_2, \ldots, v_k$ are linearly independent over 'F.

$T \in A(V)$ இன் வெவ்வேறு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் F இல் உள்ள $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ ஆகும் மற்றும் $v_1, v_2, \ldots, v_k$ என்பவை முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ இல் உள்ள T இன் சிறப்பியல்பு திசையன்கள் எனில் $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ஆகியவை F இல் நேரியல் சார்பற்றவை என நிரூபி.

19. Let $\propto = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$ $\beta = \{1, x, x^2\}$ and $\gamma = \{1\}$. Define $T: M_{2\times2}F \to F$ by $T(A) = tr(A)$. Compute $[T]_{\propto}^{\gamma}$.

$\propto = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$ $\beta = \{1, x, x^2\}$ மற்றும் $\gamma = \{1\}$ என்று எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. $T: M_{2\times2}F \to F$ என்பது $T(A) = tr(A)$ கொண்டு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $[T]_{\propto}^{\gamma}$–ஐக் காண்க.

20. Prove that the interchanging of two rows of A change the sign of its determinant.

ஒரு அணி A–வின் இரண்டு வரிசைகளை மாற்றினால் அதன்அணிக்கோவையின் குறி மாறுகிறது என்பதை நிரூபி.

NOVEMBER/DECEMBER 2025

FMA61 — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks



SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define Linearly independent.

நேரியல் சார்பற்றவை வரையறு.

2. Give an example of three linearly independent vectors in R^3 such that none of the three is a multiple of another.

R^3 இல் ஒன்றுக்கொன்று மடங்காக இல்லாத மூன்று நேரியல் சார்பற்ற திசையன்களுக்கு ஒரு உதாரணம் கொடுங்கள்.

3. Show that $\langle (a,b), (c,d) \rangle = ac - bd$ on R^2 is not an inner product space.

R^2–இல் $\langle (a,b), (c,d) \rangle = ac - bd$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட திசையன் வெளியில் ஒரு உட்பெருக்கம் இல்லை என்பதை நிரூபி.

4. Let $x = (2, 1+i, i)$ and $y = (2-i, 2, 1+2i)$ be vectors in C^3 compute $\langle x, y \rangle$.

$x = (2, 1+i, i)$ மற்றும் $y = (2-i, 2, 1+2i)$ என்பது C^3 உள்ள திசையன்கள் ஆகும். $\langle x, y \rangle$–ஐக் கண்டறிக.

5. Define algebra over 'F'.

'F'–இன் மீதான இயற்கணிதத்தை வரையறு.

6. If 'V' is finite dimensional over 'F' and $T \in A(V)$ is singular then there exist an $S \neq 0$ in $A(V)$ such that $ST = TS = 0$.

'V' என்பது 'F' க்கு மேல் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டதாக இருந்தால் மற்றும் $T \in A(V)$ வழு வாய்ந்ததாக இருந்தால், $ST = TS = 0$ என்பது இருக்கும்படி ஒரு $S \neq 0$, $A(V)$ இல் உள்ளது என்பதை நிரூபி.

7. Define Invariant.

மாற்றமில்லா உள்வெளி வரையறு.

8. Define Similar.

ஒத்ததை வரையறு.

9. Define Transpose.

இடமாற்றத்தை வரையறு.

10. Define symmetric matrix.

சமச்சீர் அணியை வரையறு.



17. Let 'V' be an inner product space. Then for $x, y, z \in V$ and $c \in F$ the following statements are true

(a) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(b) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$

(c) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$

(d) $\langle x, x \rangle = 0$ iff $x = 0$

(e) If $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ for all $x \in V_1$ then $y = z$.

'V' என்பது ஒரு உள் பெருக்க வெளி. பிறகு $x, y, z \in V$ மற்றும் $c \in F$ க்கு பின்வரும் கூற்றுகள் உண்மையாக இருக்கும் என்பதை நிரூபி.

(அ) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(ஆ) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$

(இ) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$

(ஈ) $\langle x, x \rangle = 0$ என்றால் மட்டுமே $x = 0$

(உ) அனைத்து $x \in V_1$–க்கும் $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ எனில் $y = z$.

15. (a) The determinants of a triangular matrix is the product of its entries on the main diagonal.

ஒரு முக்கோண அணியின் அணிக்கோவை அதன் முக்கிய மூலைவிட்டத்தில் உள்ள உள்ளீடுகளின் பெருக்கல் என்பதை நிரூபி.

Or

(b) If two rows of 'A' are equal (that is $v_r = v_s$, for $r \neq s$) then prove that $\det A = 0$.

'A' இன் இரண்டு வரிசைகள் சமமாக இருந்தால் (அதாவது $r \neq s$–க்கு, $v_r = v_s$), பின் $\det A = 0$ என்பதை நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that set $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\}$ is linearly independent.

$\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, x^3 - x^2 + 2x - 1\}$ என்னும் கணம் நேரியல் சார்பற்றவை என்று நிரூபி.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Show that that the set $\{1, x, x^2, \ldots x^n\}$ is linearly independent in $P_n(F)$.

$\{1, x, x^2, \ldots x^n\}$ என்னும் கணம் $P_n(F)$–இல் நேரியல் சார்பற்றவை என்று நிரூபி.

Or

(b) Let V be a vector space and let $S_1 \leq S_2 \leq V$, if S_2 is linearly independent, then S_1 is linearly independent.

V என்பது ஒரு திசையன் வெளி மற்றும் $S_1 \leq S_2 \leq V$ ஆக இருக்கட்டும். S_2 நேரியல் சார்பற்றவை எனில், S_1 நேரியல் சார்பற்றது என கூறுக.

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

12. (a) Let $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ check whether $\langle x, y\rangle = 6x_1y_1 + x_2y_2$ is an inner product or not.

$x = (x_1, x_2)$ மற்றும் $y = (y_1, y_2)$ ஆக இருக்கட்டும். $\langle x, y\rangle = 6x_1y_1 + x_2y_2$ என்பது உட்பெருக்கமாக இல்லையா என்பதை சரிபார்க்கவும்.

Or

(b) Let V be an inner product space and $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ be an orthogonal subset of V consisting of non-zero vectors. If $y \in span(S)$ then

$$y=\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y_1 v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

V என்பது ஒரு உள்பெருக்க வெளி மற்றும் $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ என்பது பூஜ்ஜியமற்ற திசையன்களைக் கொண்ட V இன் செங்குத்து உட்கணம் ஆகும். $y \in span(S)$ ஆக இருந்தால், பின்வருவற்றை நிரூபி

$$y=\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y_1 v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

13. (a) If V is finite dimensional over 'F' and if $T \in A(V)$ is invertible if and only if the constant term of minimal polynomial for T is not 0.

'V' என்பது 'F' க்கு மேல் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டதாக இருந்தால் மற்றும் $T \in A(V)$ நேர்மாறிடக் கூடியதாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை T–இன் சிறும் பல்லுறுப்பானின் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமற்றதாகும் என நிறுவுக.

Or

(b) The element $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$ if and only if for some $v \neq 0$ in V, $vT=\lambda v$.

$\lambda \in F$ என்ற உறுப்பு $T \in A(V)$–இன் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலமாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை, சில $v \neq 0$–க்கு $vT=\lambda v$ என்று நிறுவுக.

14. (a) If the matrix $A \in F_n$ has all its characteristic roots in F, then there is matrix $C \in F$ such that CAC^{-1} is a triangular matrix.

அணி $A \in F_n$–இன் அனைத்து சிறப்பு மூலங்களும் F இல் இருந்தால், CAC^{-1} என்பது ஒரு முக்கோண அணி ஆக இருக்கும்படி ஒரு அணி $C \in F$ உள்ளது என்பதை நிரூபி.

Or

(b) Prove that every linear transformation $T \in A_F(V)$ satisfies its characteristics polynomial.

ஒவ்வொரு $T \in A_F(V)$ என்னும் நேரியல் உருமாற்றமும் அதன் சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்பானை திருப்திப்படுத்துகிறது என்பதை நிரூபி.

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai